$\underline{\Omega}$ (βασικό σύνολ) , $A \subseteq \Omega$

$A^c = \Omega - A \; \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμπλήρωμα

$\{x : x \notin A\}$

πρότ. Αν $A \subseteq \Omega$ τότε

i) $A \cup A^c = \Omega$ ii) $A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow A \cap A^c = \emptyset$ έστω $A \cap A^c \neq \emptyset$

iii) $(A^c)^c = A$

Τότε $(\exists x)\, x \in A \cap A^c \Leftrightarrow (\exists x)\, x \in A \wedge x \in A^c \Leftrightarrow \underbrace{(\exists x)\, x \in A \wedge x \notin A}_{\psi}$

<u>Πρόταση</u>

Αν A, B είναι υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω τότε:

i) $A \subseteq B \Leftrightarrow A^c \supseteq B^c$ iii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

ii) $A - B = A \cap B^c$ iv) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

i) Έστω $A \subseteq B$ θ.δ.ο $A^c \supseteq B^c$

Έστω x τυχόν στοιχείο:

$x \in B^c \Rightarrow x \notin B \overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \notin A \Leftrightarrow x \in A^c$

Αντίστροφα έστω $A^c \subseteq B^c \xRightarrow{\text{ήδη βρήκα}} (A^c)^c \subseteq B$

iii) x τυχόν

$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

ii) $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow$

$x \in A \cap B^c$

$(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B^c] = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$

$\hookrightarrow [(A^c \cup B) \cap A] \cup [(A^c \cup B) \cap B^c] = [(\overset{\emptyset}{A^c \cap A}) \cup (B \cap A)] \cup [(A^c \cap B^c) \cup (\overset{\emptyset}{B \cap B^c})]$

$A = \{1, 2\}$

$B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$A \times B = \{(1,\alpha), (1,\beta), (1,\gamma), (2,\alpha), (2,\beta), (2,\gamma)\}$

$A - B = \{1, 2\}$

$B \times A = \{(\alpha,1), (\alpha,2), (\beta,1), (\beta,2), (\gamma,1), (\gamma,2)\}$

$A \times B \neq B \times A$

$(\alpha, \beta) = \{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}$ $\quad (\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \Leftrightarrow \alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$

Έχουμε $A \times B = \{(\alpha,\beta) : \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$

$A \times B \neq B \times A$, $\quad A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$

$A \times A = A^2$

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad A = \{1, 2, 3\}$ $\quad A^2 = A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3),$

$(2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$

$(x,y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

$(x,y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$

$\Leftrightarrow \sim[(x,y) \in A \times B] \Leftrightarrow \sim(x \in A \wedge y \in B) \Leftrightarrow \sim(x \in A)$

$\vee \sim(y \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$

(11)

Πρόταση

i) $A\times B = B\times A \Leftrightarrow A=\emptyset \vee B=\emptyset \vee A=B$

ii) $A\times(B\cap\Gamma) = (A\times B)\cap(A\times\Gamma)$

iii) $(B\cup\Gamma)\times A = (B\times A)\cap(\Gamma\times A)$

iv) $A\times(B\cup\Gamma) = (A\times B)\cup(A\times\Gamma)$

v) $(B\cup\Gamma)\times A = (B\times A)\cup(\Gamma\times A)$

vi) $A\times(B-\Gamma) = (A\times B)-(A\times\Gamma)$

vii) $(B-\Gamma)\times A = B\times A)-(\Gamma\times A)$

i) $(\Leftarrow)$ προφανές

$(\Rightarrow)$ Έστω ισχύει $A\times B = B\times A$

Αν $A=\emptyset$ ή $B=\emptyset$ ... (ισχύει) Υποθέτουμε ότι

$A\neq\emptyset\neq B$

Θεωρώ τυχόν $x\in A$. Τότε $\forall\, y\in B$ έχουμε:

$(x,y)\in A\times B \xRightarrow{A\times B = B\times A} (x,y)\in B\times A \Rightarrow x\in B \wedge y\in A$

$$\begin{rcases} A\subseteq B \\ B\subseteq A \end{rcases} \Rightarrow A=B$$

(iv) Έστω (x,y) τυχόν ζεύγος

$(x,y)\in A\times(B\cup\Gamma) \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup\Gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in\Gamma) \Leftrightarrow$

$(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in\Gamma) \Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \vee (x,y)$

$\in A\times\Gamma \Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$

ii) * x τυχον

12

$x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow \sim(x \in A^c) \Leftrightarrow \sim(x \notin A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim(\sim x \in A) \Leftrightarrow x \in A$